

---

## **Capítulo 4**

### **Trabajo y energía**

---

17 Problemas de selección - página 63  
(soluciones en la página 116)

10 Problemas de desarrollo - página 69  
(soluciones en la página 117)

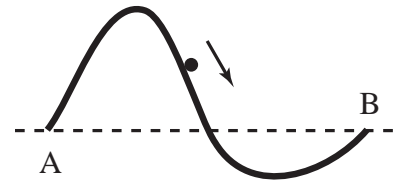


## Sección 4.A

## Problemas de selección

130. La figura muestra, en línea llena, parte de la trayectoria de un carrito en una montaña rusa; sus puntos inicial y final, A y B, están a la misma altura. Hay roce entre el carrito y la pista. En la trayectoria mostrada los trabajos realizados por las fuerzas de gravedad y roce que actúan sobre el carrito son respectivamente

- A) no nulos y del mismo signo.
- B) cero y positivo.
- C) cero y negativo.
- D) no nulos y de signos opuestos.
- E) no se puede asegurar ninguna de las otras 4 opciones.

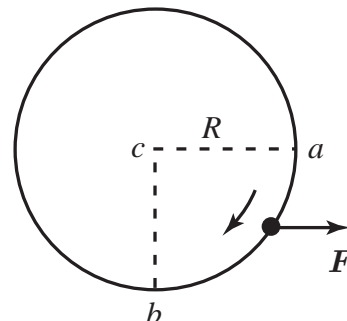


131. Sobre una partícula que se mueve en el eje  $x$  actúa la fuerza  $\mathbf{F} = (3x^2 - 1) \hat{u}_x$  donde  $x$  es la posición de la partícula y todas las unidades pertenecen al SI. El trabajo, en Joules, realizado por esta fuerza cuando la partícula se mueve desde el origen al punto  $x = 2$  es

- A) 6
- B) 22
- C) 8
- D) 24
- E) 11

**132.** La figura muestra una partícula que se mueve sobre un riel de radio  $R$  y centro  $c$ . Las líneas  $\overline{ca}$  y  $\overline{cb}$  son perpendiculares. Sobre la partícula actúa una fuerza  $\mathbf{F}$  constante de módulo  $F$  y paralela a  $\overline{ca}$ . El trabajo realizado por  $\mathbf{F}$  cuando la partícula va de  $a$  hasta  $b$  es

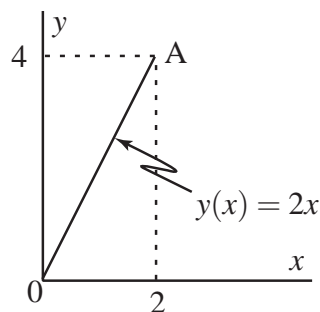
- A)  $-2RF$
- B)  $-RF$
- C) 0
- D)  $-\sqrt{2}RF$
- E)  $-\pi RF/4$



**133.** Sobre una partícula que se mueve en el plano  $xy$  actúa la fuerza  $\mathbf{F} = 3xy\mathbf{i}$  donde  $(x,y)$  son las coordenadas de la partícula (todas las unidades son del SI). El trabajo realizado por esta fuerza a lo largo de la recta que va del origen al punto A de coordenadas (2,4) es

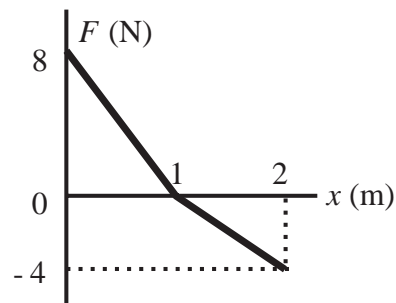
- A) 16.
- B) 24
- C) 72.
- D) 48.
- E) ninguno de los anteriores.

Ayuda: Halle  $\mathbf{F}$  en función de  $x$  para los puntos sobre la curva.



**134.** Una partícula, en el origen y de masa 1 kg, parte del reposo mientras está sometida únicamente a la fuerza  $\mathbf{F} = F(x)\hat{\mathbf{u}}_x$ , donde  $F(x)$  es dada en la gráfica. La rapidez de la partícula en  $x = 2$  m, en m/s, es

- A) 4
- B)  $2\sqrt{3}$
- C) 2
- D) 0
- E)  $2\sqrt{2}$

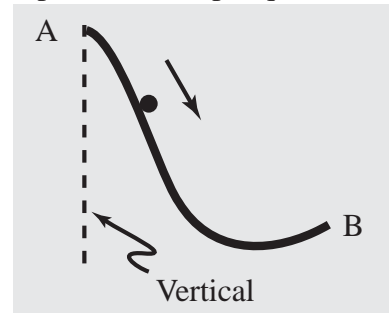


135. Una partícula de masa 2 kg inicialmente en reposo siente una fuerza neta dada por  $F = 6t \hat{u}_x$  donde  $t$  es el tiempo y todas las unidades pertenecen al Sistema Internacional. El trabajo, en Joules, realizado por esta fuerza entre  $t = 0$  y  $t = 2$  seg es

- A) 12
- B) 9
- C) 6
- D) 24
- E) 36

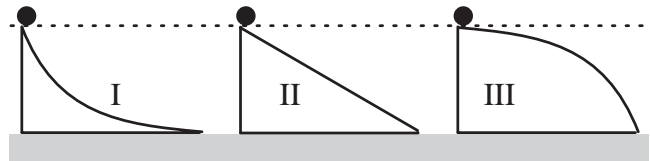
136. La figura muestra una pista inmersa en un fluido. Una partícula se mueve sobre la pista con rapidez constante desde el punto A al B; la partícula está sometida a su peso, la normal con la pista y a una fuerza amortiguadora debida al fluido. La fuerza neta sobre la partícula cumple que

- A) es nula.
- B) su trabajo de A a B es no nulo y positivo.
- C) no es nula pero su trabajo sí lo es.
- D) su trabajo es igual al de las fuerzas no conservativas.
- E) su trabajo no se puede calcular sin más información.



137. La figura muestra 3 toboganes sin roce, todos de la misma altura. Desde la parte superior de cada uno de ellos se deja caer un objeto, todos de distinto peso. Al llegar abajo, el objeto con mayor rapidez será

- A) necesariamente el del tobogán II
- B) necesariamente el del tobogán I
- C) necesariamente el del tobogán III
- D) ninguno, todos tendrán la misma rapidez.
- E) el más pesado



**138.** Una fuerza, que actúa sobre una partícula, es conservativa si

- A) el trabajo que realiza entre dos puntos cualesquiera es independiente de la trayectoria que los une.
  - B) el trabajo que realiza es positivo para toda trayectoria cerrada.
  - C) el trabajo que realiza es siempre nulo.
  - D) el trabajo que realiza es siempre positivo.
  - E) se conserva la energía cinética de la partícula.
- 

**139.** Cierta fuerza  $\mathbf{F}$ , que actúa sobre una partícula, es conservativa y  $U(\mathbf{r})$  es la energía potencial correspondiente. Sean  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  dos trayectorias distintas que van desde un punto inicial  $\mathbf{r}_A$  a un punto final  $\mathbf{r}_B$  y sean  $W_1$  y  $W_2$  los trabajos realizados por  $\mathbf{F}$  cuando la partícula sigue dichas trayectorias. Se puede afirmar que

- A)  $U(\mathbf{r}_A) = U(\mathbf{r}_B)$
  - B) (Energía cinética en  $\mathbf{r}_A$ )  $\neq$  (Energía cinética en  $\mathbf{r}_B$ )
  - C)  $W_1 = U(\mathbf{r}_B) - U(\mathbf{r}_A)$
  - D)  $W_1 \neq W_2$
  - E) Si la partícula sigue la trayectoria  $\Gamma_1$  y luego sigue la trayectoria  $\Gamma_2$  en sentido opuesto entonces el trabajo neto realizado por  $\mathbf{F}$  es cero
- 

**140.** Dada una función de energía potencial  $U(x)$ , la fuerza  $\mathbf{F}(x)$  correspondiente irá en el sentido positivo del eje  $x$  en las regiones de  $x$  donde

- A)  $U(x)$  sea una función positiva.
  - B)  $U(x)$  sea una función negativa.
  - C)  $U(x)$  sea una función creciente.
  - D)  $U(x)$  sea menor que la energía.
  - E)  $U(x)$  sea una función decreciente.
-

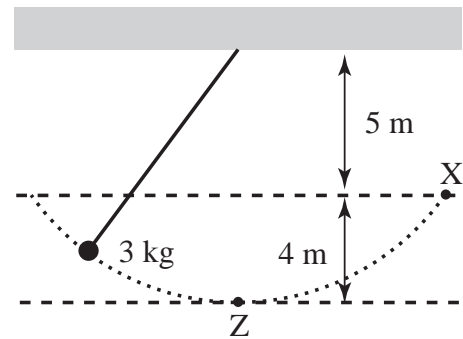
---

**141.** Una partícula está sometida a varias fuerzas, conservativas y no conservativas. La variación de su energía cinética es igual

- A) al trabajo que realizan las fuerzas **conservativas**.
  - B) al trabajo de las fuerzas **conservativas** más el trabajo de las **no conservativas**.
  - C) al trabajo que realizan las fuerzas **no conservativas**.
  - D) al negativo de la variación de la energía potencial total.
  - E) a la variación de la energía mecánica total.
- 

**142.** La figura representa un péndulo de 9 m de longitud y masa  $M=3$  kg. El punto X es el más alto y Z el más bajo de la trayectoria. La rapidez de  $M$ , en m/s, en el punto Z es

- A)  $2\sqrt{5}$ .
- B)  $4\sqrt{5}$ .
- C)  $6\sqrt{5}$ .
- D) 10.
- E) diferente de las otras 4 opciones.



---

**143.** Si la energía potencial gravitatoria de una partícula aumenta podemos asegurar que

- A) su energía cinética aumenta.
  - B) su energía cinética disminuye.
  - C) el trabajo realizado por el peso es negativo.
  - D) el trabajo realizado por el peso es positivo.
  - E) su energía total aumenta.
-

**144.** Una piedra de masa  $M$  se arroja verticalmente hacia arriba con una rapidez inicial  $v_0$ . Suponga que la fuerza de roce con el aire es constante y de módulo  $nMg$  (con  $n$  una constante positiva). La altura máxima  $h$  que alcanza la piedra es

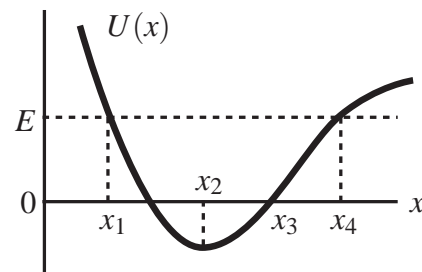
- A)  $h = \frac{v_0^2}{2g(1-n)}$   
 B)  $h = \frac{v_0^2}{2gn}$   
 C)  $h = \frac{v_0^2}{2g}$   
 D)  $h = \frac{v_0^2}{2g} - n$   
 E)  $h = \frac{v_0^2}{2g(1+n)}$

**145.** Una partícula se mueve en una dimensión, y la fuerza neta que actúa sobre ella tiene asociada la energía potencial  $U(x) = -x^3/3 + 2x$  (en unidades del Sistema Internacional). ¿Cuál de las siguientes afirmaciones relacionadas con el movimiento de la partícula es correcta?

- A) Ninguna de las otras 4 afirmaciones es cierta.  
 B) El punto  $x = \sqrt{2}$  es un punto de equilibrio estable.  
 C) El único punto de equilibrio es  $x = \sqrt{2}$ .  
 D) El punto  $x = \sqrt{2}$  es un punto de equilibrio inestable.  
 E) Los puntos de equilibrio son  $x = 0$ ,  $x = \sqrt{6}$  y  $x = -\sqrt{6}$ .

**146.** La figura es la gráfica de la energía potencial  $U(x)$  asociada a la fuerza neta que actúa sobre una partícula obligada a moverse sobre el eje  $x$  con energía mecánica  $E$ . ¿Cuál de las siguientes afirmaciones referidas al movimiento de la partícula es **falsa**?

- A) En  $x_4$  la aceleración apunta en el sentido negativo del eje  $x$ .  
 B) Si la partícula está inicialmente en  $x_3$  no puede alcanzar ningún punto con  $x > x_4$ .  
 C) En  $x_1$  la rapidez es nula.  
 D)  $U(x_3) = 0$  por lo cual la energía cinética es máxima en  $x_3$ .  
 E) En  $x_2$  la aceleración es nula.

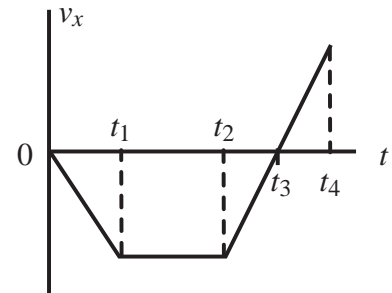




## Sección 4.B

## Problemas de desarrollo

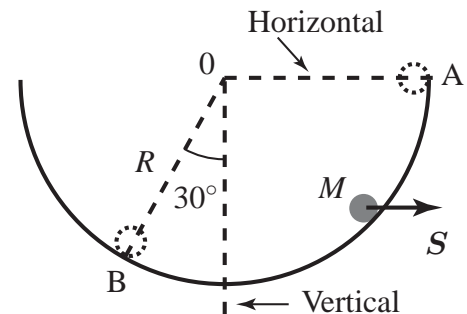
**147.** Una partícula se mueve sobre el eje  $x$ , siendo la representación gráfica de la componente  $x$  de su velocidad la que se muestra en la figura. En cada una de las siguientes casillas aparece el trabajo realizado por la fuerza neta sobre la partícula en un intervalo; indique su signo terminando de rellenar las casillas con los símbolos “=0”, “> 0” y “< 0” que correspondan.







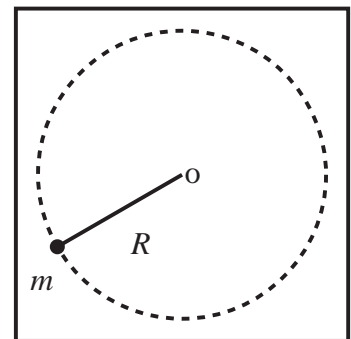
**148.** La figura muestra una pista semicircular sin roce, de radio  $R = \sqrt{3}$  m. Una partícula de masa  $M = 2\sqrt{3}$  kg se mueve apoyada sobre la pista. Sobre la partícula actúa, además de la fuerza gravitatoria y de contacto con la pista, una fuerza constante  $S$  horizontal dirigida hacia la derecha y con módulo 14 Newtons.



- Calcule el trabajo que realiza cada una de las fuerzas que actúan sobre la partícula cuando ésta se mueve desde el punto A al punto B.
- Si la rapidez de la partícula en el punto A es de 4 m/s halle su rapidez en el punto B y el módulo de la normal que en ese punto le aplica la pista (no olvide la fuerza  $S$  en su diagrama de fuerzas).

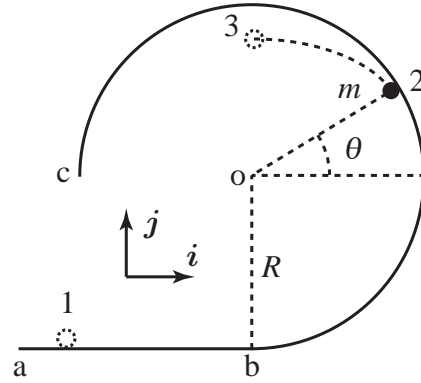
**149.** Una partícula de masa  $m$  atada a una cuerda tensa de radio  $R$  gira sobre una mesa horizontal con roce, siendo el coeficiente de roce dinámico  $\mu$ , ver figura. La partícula inicia su movimiento con una rapidez  $v_0$ .

- Halle la rapidez de la partícula cuando ha girado un ángulo  $\theta$  (en radianes).
- Tome  $R = 1/2$  m,  $\mu = 0.1$  y  $v_0 = 4$  m/s y calcule cuántas vueltas da la partícula antes de detenerse.



**150.** La figura muestra una pista sin roce compuesta de dos tramos. El tramo ab es recto y horizontal. El tramo bc está en un plano vertical y tiene forma de  $3/4$  de circunferencia de radio  $R$  con centro en el punto o.

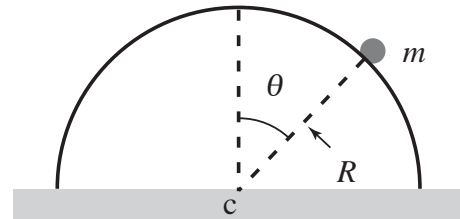
Una partícula de masa  $m$  se lanza hacia la derecha desde el punto 1 y cuando llega al punto 2 abandona la pista y continúa con movimiento parabólico sometido a la gravedad,  $\theta \in (0, \pi/2)$ . El punto 3 indica el punto más alto de la trayectoria.



- Halle la rapidez y el vector velocidad de la partícula en el punto 2.
- Calcule la energía de la partícula.
- Utilizando conservación de la energía halle la altura del punto 3 respecto al tramo ab.
- Encuentre la rapidez de la partícula en el punto 1.

**151.** Sobre una semiesfera lisa y de radio  $R$  resbala una partícula de masa  $m$ . La partícula parte del punto más alto de la semiesfera con una rapidez angular  $\omega_0$ .

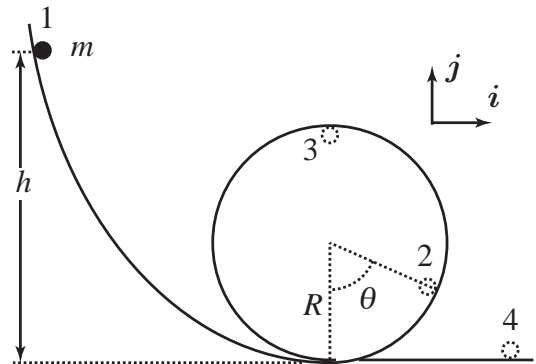
- Cuando la línea entre el centro  $c$  de la esfera y la partícula forma un ángulo  $\theta$  con la vertical (ver figura) halle: la rapidez angular  $\omega$  y el módulo  $N$  de la normal.
- ¿Para qué valor de  $\cos(\theta)$  la partícula abandona la semiesfera?



- Ahora se quiere que la partícula salga disparada horizontalmente desde el punto mas alto de la semiesfera sin que tenga oportunidad de resbalar. ¿Cuál es la menor velocidad angular  $\omega_0$  que debe tener?

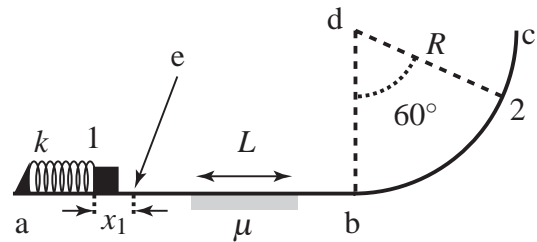
**152.** Cierta pista lisa comienza con una rampa, continúa con un rizo circular y de radio  $R$ , y finaliza en un tramo recto. Toda la pista está contenida en un plano vertical. Una partícula de masa  $m$  se suelta del reposo desde el punto 1 a una altura desconocida  $h$  medida desde la base del rizo (ver figura). La partícula completa el rizo (pasa por los puntos 2 y 3) y luego continúa por el tramo recto (punto 4). El punto 3 es el más alto del rizo. Suponga que  $h$  es la mínima altura permitida para que la partícula complete una vuelta en el rizo.

- Calcule la energía de la partícula tomando nivel cero de energía gravitacional en la base del rizo.
- Encuentre el valor de  $h$ .
- Halle el vector velocidad en el punto 2.
- Encuentre la aceleración angular  $\ddot{\theta}$  en el punto 2.



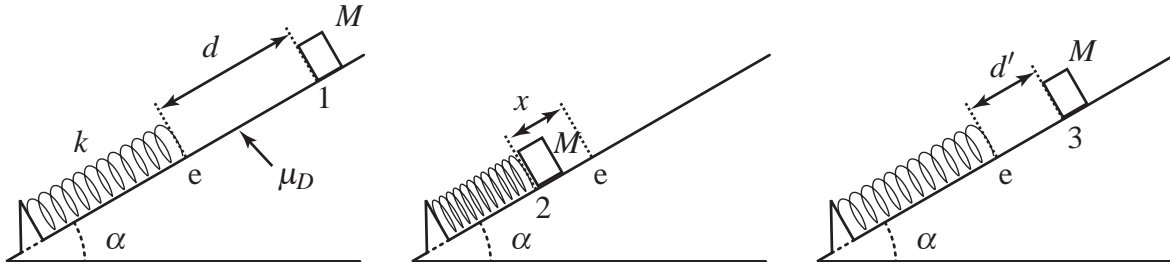
**153.** La figura muestra una pista compuesta de dos tramos y que se encuentra en un plano vertical. El tramo ab es recto y horizontal y el tramo bc tiene forma de 1/4 de circunferencia de radio  $R = 5$  m y centro en el punto d. La pista es lisa a excepción de un trozo en el tramo recto de longitud  $L$  desconocida, siendo  $\mu = 7/10$  el coeficiente de roce dinámico. En un extremo de la pista hay un resorte de constante elástica  $k = 800$  N/m, el punto e es el punto de equilibrio del resorte.

Una partícula de masa  $m = 2$  kg parte del reposo en el punto 1 donde se encuentra comprimiendo el resorte una longitud de  $x_1 = 4/10$  m. La partícula no está unida al resorte, llega hasta el punto 2 y luego regresa.



- Halle el módulo de la fuerza normal debida a la pista en el punto 2.
- Halle la longitud  $L$ .
- Al regreso la partícula comprime nuevamente el resorte. Halle la nueva compresión máxima del resorte.

**154.** En la parte inferior de un plano inclinado  $\alpha = 30^\circ$  se encuentra un resorte de constante elástica  $k = 200$  N/m. De un punto 1 a una distancia  $d$  del extremo libre del resorte (señalado como e en los dibujos) se suelta un bloque de masa  $M = 4$  kg, siendo  $\mu_D = \sqrt{3}/6$  el coeficiente de roce dinámico entre el plano y el bloque. El bloque comprime el resorte una longitud  $x = 1/2$  m (punto 2) y luego se regresa deteniéndose en un punto 3 a una distancia  $d'$  del extremo libre del resorte.



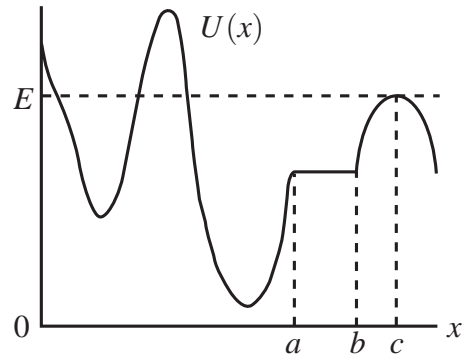
- Halle los módulos de las fuerzas normal y de roce dinámico.
- Determine  $d$  y  $d'$ .
- Si en lugar de llegar al punto 3 el bloque permanece en reposo en el punto 2 halle la fuerza de roce estática (módulo y sentido) y los valores permitidos para el coeficiente de roce estático  $\mu_E$ .

**155.** Cierta partícula está obligada a moverse sobre el eje  $x$  mientras está sometida a una fuerza neta cuya energía potencial  $U(x)$  se muestra en la gráfica. La energía  $E$  de la partícula coincide con el máximo local de  $U(x)$  en  $x = c$ . En el intervalo  $[a, b]$  la energía potencial es constante.

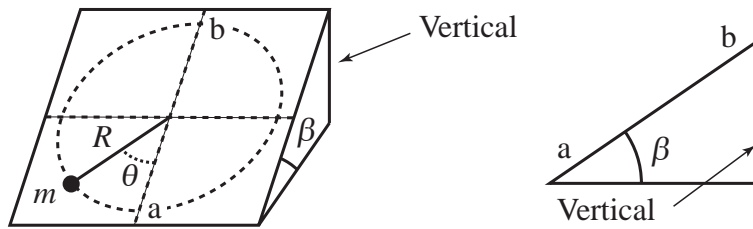
La partícula comienza su movimiento en el punto  $x = b$  dirigiéndose hacia la izquierda del eje  $x$ .

**a.** Describa el movimiento ulterior de la partícula especificando dirección del movimiento, zonas de aceleración, zonas de desaceleración, zonas de velocidad constante, puntos donde se detiene.

**b.** Señale muy brevemente el cambio más resaltante en el movimiento si la energía es ligeramente menor. Señale también qué ocurre si es ligeramente mayor.



**156.** La figura abajo a la izquierda muestra una partícula de masa  $m$  que, atada a una cuerda de longitud  $R$ , describe una trayectoria circular sobre un plano inclinado un ángulo  $\beta$  respecto a la horizontal. El punto  $a$  es el más bajo de la trayectoria y el  $b$  el más alto. La figura a la derecha muestra un corte del plano inclinado. El coeficiente de roce dinámico entre el plano y la partícula es  $\mu$ .



**a.** Halle los módulos de la normal y de la fuerza de roce dinámica cuando el eje que va del centro del círculo a la partícula forma un ángulo  $\theta$  con el eje  $ab$ .

**b.** Tome nivel cero de energía potencial gravitacional en el punto  $a$  y halle la energía potencial de la partícula en el punto  $b$ . Determine también el trabajo realizado por el roce cuando la partícula va desde  $a$  hasta  $b$ .

**c.** Si la partícula parte del punto  $a$  con una rapidez  $v_a$  halle su rapidez cuando pasa por primera vez por el punto  $b$ .

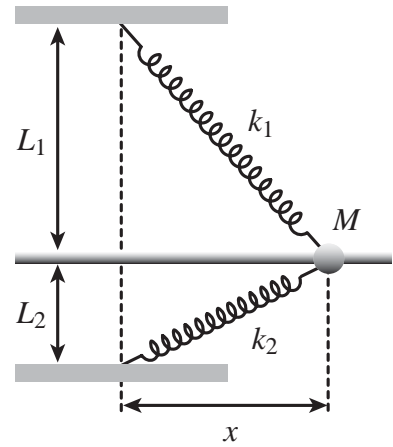
**157.** La figura muestra una cuenta de masa  $M$  que desliza sin roce en un alambre horizontal fijo que la atraviesa. Dos resortes de longitud natural nula tienen un extremo atado a la cuenta y el otro extremo atado a planchas horizontales fijas. Los resortes y el alambre se encuentran en el mismo plano vertical y los puntos donde los resortes se sujetan a las planchas pertenecen a la misma vertical. Se conocen las distancias de las planchas al alambre,  $L_1$  y  $L_2$ , y las constantes elásticas de los resortes,  $k_1$  y  $k_2$ .

a. ¿Qué fuerzas actúan sobre la cuenta? ¿Cuáles realizan trabajo?

b. Cuando el bloque tiene la posición mostrada en la figura su rapidez es  $V$ . Demuestre que la energía del sistema es

$$E = \frac{1}{2}MV^2 + \lambda x^2,$$

donde  $\lambda$  es una constante que debe ser determinada.



**158.** Las figura A muestra un resorte de constante elástica  $k$  y longitud  $l_0$  que cuelga verticalmente atado del techo. En el extremo libre se ata al resorte un bloque de masa  $M$  y con él se le comprime una longitud  $d$  (ver figura B). El bloque se suelta y comienza a oscilar. Determine la máxima elongación  $h$  que alcanza el resorte (figura C).

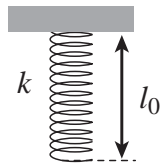


Figura A

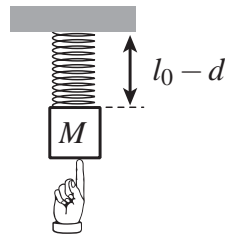


Figura B

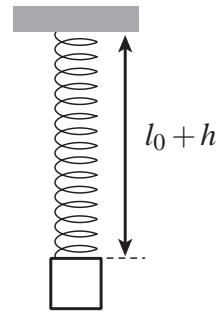


Figura C

**Sección 7.G**

**Trabajo y Energía (Selección)**

	132 B	135 E
130 C	133 A	136 C
131 A	134 C	137 D
—		
138 A	141 B	144 E
139 E	142 B	145 D
140 E	143 C	146 D
—		

## Sección 7.H

## Trabajo y Energía (Desarrollo)

147.

$$W(0, t_1) > 0$$

$$W(t_1, t_2) = 0$$

$$W(t_2, t_3) < 0$$

$$W(t_3, t_4) > 0$$

148.

a.

$$W_{\text{peso}} = 30\sqrt{3} \text{ J}, \quad W_{\text{normal}} = 0, \quad W_S = -21\sqrt{3} \text{ J}.$$

b.

$$V_B = 5 \text{ m/s}, \quad N = 73 \text{ N}.$$

149.

a.

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2\mu g R \theta}.$$

b.

$$n = \frac{v_0^2}{4\pi\mu g R} = \frac{8}{\pi} \approx 2,5.$$

150.

a.

$$v_2 = \sqrt{Rg \text{sen}(\theta)}, \quad \mathbf{v}_2 = \sqrt{Rg \text{sen}(\theta)} [-\text{sen}(\theta)\mathbf{i} + \cos(\theta)\mathbf{j}].$$

b.

$$E = mRg \left[ 1 + \frac{3}{2} \text{sen}(\theta) \right].$$

c.

$$h_3 = R \left[ 1 + \frac{3}{2} \text{sen}(\theta) - \frac{1}{2} \text{sen}^3(\theta) \right].$$

d.

$$v_1 = \sqrt{Rg[2 + 3\text{sen}(\theta)]}.$$

**151.****a.**

$$w = \sqrt{w_0^2 + \frac{2g}{R} [1 - \cos(\theta)]}, \quad N = mg [3\cos(\theta) - 2] - mRw_0^2.$$

**b.**

$$\cos(\theta) = \frac{2}{3} + \frac{Rw_0^2}{3g}.$$

**c.**

$$w_0 = \sqrt{\frac{g}{R}}.$$

**152.****a.**

$$E = \frac{5}{2} mgR.$$

**b.**

$$h = \frac{5}{2} R.$$

**c.**

$$\mathbf{v}_2 = \sqrt{[3 + 2\cos(\theta)] gR} [\cos(\theta)\mathbf{i} + \sin(\theta)\mathbf{j}].$$

**d.**

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{R} \sin(\theta).$$

**153.****a.**

$$N = 10 \text{ N}.$$

**b.**

$$L = 1 \text{ m}.$$

**c.**

$$x_{\max} = \frac{3}{10} \text{ m}.$$

**154.****a.**

$$N = 20\sqrt{3} \text{ N}, \quad F_{\text{roce D}} = 10 \text{ N}.$$

**b.**

$$d = 2 \text{ m}, \quad d' = \frac{1}{3} \text{ m}.$$

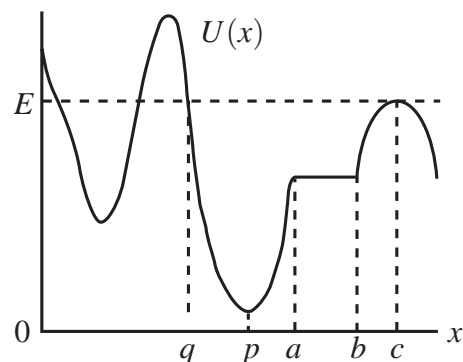
**c.**

$$F_{\text{roce E}} = 80 \text{ N (tangente al plano inclinado apuntando hacia abajo)}, \quad \mu_E \geq \frac{4}{\sqrt{3}}.$$



155. Las flechas entre dos puntos indicarán que el sentido del movimiento es del primer punto al segundo.

a. En el trayecto  $b \rightarrow a$  la partícula se mueve con velocidad constante. En el  $a \rightarrow p$  acelera, en  $p \rightarrow q$  desacelera y se detiene en  $q$ . En  $q$  la fuerza neta sobre la partícula la hace regresar. En el trayecto  $q \rightarrow p$  acelera, desacelera en  $p \rightarrow a$ , se mueve con velocidad constante en  $a \rightarrow b$  y desacelera en el trayecto  $b \rightarrow c$ , quedándose en reposo permanente en el punto  $c$  debido a que allí tiene velocidad nula y la fuerza neta es nula (se trata de un punto de equilibrio inestable).



b. Si la energía es ligeramente menor no se detendrá en el punto  $c$  sino un poco antes, digamos en  $x = c^-$ ; luego permanecerá oscilando entre  $x = c^-$  y un punto  $x = q^+$ . Si la energía es ligeramente mayor no se detendrá en  $c$  y continuará su viaje hacia la derecha del eje  $x$ .

156.

a.

$$N = mg \cos(\beta), \quad F_{\text{Roce}} = \mu mg \cos(\beta).$$

b.

$$U_b = 2mgR \sin(\beta), \quad W_{\text{Roce}} = -\pi R \mu mg \cos(\beta).$$

c.

$$v_b = \sqrt{v_a^2 - 2gR[2 \sin(\beta) + \pi \mu \cos(\beta)]}.$$

157.

a. Actúan la fuerza elástica de cada resorte, el peso de la cuenta y la fuerza de contacto con el alambre que es perpendicular al mismo. Sólo realizan trabajo las fuerzas que aplican los resortes.

b.

$$\lambda = \frac{1}{2}(k_1 + k_2).$$

158.

$$h = d + \frac{2Mg}{k}.$$